4.5.1 Çözümlü Problemler

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ polinomunun $x_0 = -1$ noktasindaki 3. dereceden Taylor polinomunu yazınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 8, \\ f'(x) = 3x^2 + 6x - 2 &\Rightarrow f'(-1) = -5, \\ f''(x) = 6x + 6 &\Rightarrow f''(-1) = 0, \\ f'''(x) = 6 &\Rightarrow f'''(-1) = 6, \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

olacağından $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 8 - 5(x+1) + (x+1)^3$ olur. $\diamond$

(2) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktadaki verilen dereceden Taylor formüllerini yazınız.

(a)	$f(x) = (1 - x + x^2)^3, x_0 = 0, n = 2;$	(b)	$f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1, n = 2;$
(c)	$f(x) = \frac{x+3}{3+x^2}, x_0 = 1, n = 2;$	(d)	$f(x) = e^{2x-x^2}, x_0 = 0, n = 3;$
(e)	$f(x) = \sin(\sin x), x_0 = 0, n = 3;$	(f)	$f(x) = \frac{x^2}{1+\sin x}, x_0 = 0, n = 6;$
(g)	$f(x) = a\cos h\frac{x}{a}, a > 0, x_0 = 1, n = 2;$	(h)	$f(x) = \frac{x}{\arcsin x}, x_0 = 0, n = 3;$
(i)	$f(x) = e^{x\sin x}, x_0 = 0, n = 4;$	(j)	$f(x) = \ln\frac{\sin x}{x}, x_0 = 0, n = 5;$
(k)	$f(x) = (1+x)^{\sin x}, x_0 = 0, n = 5;$	(l)	$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, x_0 = 0, n = 4;$
(m)	$f(x) = \tan x, x_0 = 0, n = 3.$		

Çözüm: (a) $f'(x) = 3(-1+2x)(1-x+x^2)^2, f''(x) = 6(1-x+x^2)^2 + 6(-1+2x)^2(1-x+x^2)$ olduğuna göre, $f(0) = 1, f'(0) = -3, f''(0) = 12$ dır. O halde,

$$f(x) = 1 - 3x + 6x^2 + r_2(0;x), r_2(0;x) = o(x^2)$$

olur.

(b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ olduğuna göre, $f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{1}{4}$ tür. O halde,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + r_2(1;x), r_2(1;x) = o((x-1)^2)$$

olur.

(c) $f(1) = 1, f'(1) = -\frac{3}{16}, f''(1) = -\frac{1}{4}$ olduğuna göre,

$$f(x) = 1 - \frac{3}{16}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + r_2(1;x), r_2(1;x) = o((x-1)^2)$$

olur.

(d) $f'(x) = 2(1-x)e^{2x-x^2}, f''(x) = 2(-1+2(1-x)^2)e^{2x-x^2}, f'''(x) = 4(1-x)e^{2x-x^2}(-3+2(1-x)^2)$ olduğuna göre, $f(0) = 1, f'(0) = 2, f''(0) = 2, f'''(0) = -4$ dır. O halde,

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + r_3(0;x), r_3(0;x) = o(x^3)$$

olur.

(e) $f'(x) = \cos x \cos(\sin x), f''(x) = -\sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x), f'''(x) = -\cos x \cos(\sin x) + 3 \sin x \cos x \sin(\sin x) - \cos^3 x \cos(\sin x)$ olduğuna göre, $f(0) = 0, f'(0) = 1 f''(0) = 0, f'''(0) = -2$ dır. O halde,

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + r_3(0;x), r_3(0;x) = o(x^3)$$

olur.

(f) $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 2, f'''(0) = -6, f^{(4)}(0) = 24, f^{(5)}(0) = -100, f^{(6)}(0) = 480$ olduğuna göre,

$$f(x) = x^2 - x^3 + x^4 - \frac{5}{6}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + r_6(0;x), r_6(0;x) = o(x^6)$$

olur.

(g) $f(0) = a, f'(0) = 0, f''(0) = \frac{1}{a}$ olduğuna göre,

$$f(x) = a + \frac{x^2}{2a} + r_2(0;x), r_2(0;x) = o(x^2)$$

olur.

(h) $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -\frac{1}{3}, f^{(4)}(0) = 8$ olduğuna göre,

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{17}{360}x^4 + r_4(0;x), r_4(0;x) = o(x^4)$$

olur.

(i) $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 2, f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = 8$ olduğuna göre,

$$f(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + r_4(0;x), r_3(0;x) = o(x^4)$$

olur.

(j) $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{1}{3}, f^{(4)}(0) = -\frac{2}{15}$ olduğuna göre,

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + r_4(0;x), r_4(0;x) = o(x^5)$$

olur.

(k) $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 2, f'''(0) = -\frac{1}{3}, f^{(4)} = 16, f^{(5)}(0) = 80$ olduğuna göre,

$$f(x) = (1+x)^{\sin x} = 1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{3}x^5+r_5(0;x), r_5(0;x) = o(x^5)$$

olur.

(l) $f(0) = e, f'(0) = \frac{e}{2}, f''(0) = \frac{11e}{12}, f'''(0) = -\frac{21e}{8}, f^{(4)}(0) = \frac{2447e}{240}$ olduğuna göre,

$$f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + \frac{2447e}{5760}x^4 + r_4(0;x), r_4(0;x) = o(x^4)$$

olur.

(m) $(\tan x)' = \cos^{-2} x, (\tan x)'' = 2\cos^{-3} x \sin x, (\tan x)''' = 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x, (\tan x)^{(4)} = 24\cos^{-5} x \sin^3 x + 16\cos^{-3} x \sin x$ olduğuna göre, $\tan 0 = 0, \tan' 0 = 1, \tan'' 0 = 0, \tan''' 0 = 2 \tan^{(4)} 0 = 0$ olur. Demek ki,

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

olduğu elde edilir. ⋄

(3) Aşağıdaki fonksiyonların Peano kalan terimli Maclaurin formüllerini yazınız.

(a)	$f(x) = e^{5x-1}$;	(b)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$;
(c)	$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$;	(d)	$f(x) = \ln(2+ex)$;
(e)	$f(x) = (x+5)e^{2x}$;	(f)	$f(x) = \ln\frac{3+x}{2-x}$;
(g)	$f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x-15}$;	(h)	$f(x) = \frac{1}{x^4-3x^2-4}$;
(i)	$f(x) = \sin^2 x.\cos^2 x$;	(j)	$f(x) = \sin^3 x$;
(k)	$f(x) = \arctan x$;	(l)	$f(x) = \arcsin x$;

Çözüm: (a) $f(x) = e^{-1}e^{5x}[e^t = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ olduğundan]
$= e^{-1}[\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(5x)^k}{k!} + o((5x)^n)] = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{5^k}{e.k!}x^k + o(x^n)$ olur.
(b) $f(x) = (1+4x)^{-\frac{1}{2}}[(1+t)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ olduğundan]

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(4x)^k}{k!} + o((4x)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{4^k.x^k}{k!} + o(x^n)$$

olur.
(c) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}[\frac{1}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k.t^k + o(t^n)$ olduğundan]
$= 2 - 5[\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k.x^k + o(x^n)] = -3\sum\limits_{k=1}^{n} 5(-1)^{k-1}.x^k + o(x^n)$ olur.
(d) $f(x) = \ln 2 + \ln(1+\frac{ex}{2})[\ln(1+t) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k} + o(t^n)$ olduğundan]
$= \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}.\frac{(\frac{ex}{2})^k}{k} + o((\frac{ex}{2})^n) = \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.(\frac{e}{2})^k.x^k + o(x^n)$
olur.
(e) $f(x) = (x+5)e^{2x} = xe^{2x} + 5e^{2x}[e^t = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ olduğundan]
$= x[\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{k!}x^k + o(x^{n-1})] + 5[\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}x^k + o(x^n)] = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2^k.x^{k+1}}{k!} + \sum\limits_{k=0}^{n} 5\frac{2^k}{k!}x^k +$
$o(x^n)[\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2^k.x^{k+1}}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k-1!}x^k$ olduğundan] $= 5 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{5.2^k}{k!}x^k +$
$o(x^n) = 5 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n)$ olur.
(f) $f(x) = \ln\frac{3}{2} + \ln(1+\frac{x}{3}) - \ln(1-\frac{x}{2})[\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k} + o(t^n)$

olduğundan] $= \ln\frac{3}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3^k})x^k + o(x^n)$ olur.

(g) $f(x) = 1 + \frac{17-x}{(x+4)(x-3)} = 1 - \frac{3}{x+3} + \frac{2}{x-3} = 1 - \frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{x}{4}} - \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}[\frac{1}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + o(t^n)$ ve $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{k=0}^{n} t^n + o(t^n)$ olduğundan] $= 1 - \frac{3}{4}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{x^k}{4^k} - \frac{2}{3}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k} + o(x^n) = -\frac{5}{12} + \sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^k} - \frac{2}{3^{k+1}})x^k + o(x^n)$ olur.

(h) $f(x) = \frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{1}{5}(\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+1}) = \frac{1}{5}(\frac{1}{4(1-\frac{x^2}{4})} - \frac{1}{x^2+1})[\frac{1}{1-t}$ ve $\frac{1}{1+t}$ fonksiyonlarının Maclaurin formüllerinden] $= \sum\limits_{k=0}^{n}((-1)^{k+1} - \frac{1}{4^{k+1}})\frac{x^{2k}}{5} + o(x^{2n+1})$ olur.

(i) $f(x) = \sin^2 x.\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)[\cos t = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1})$ olduğundan] $= \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}2^{4k-3}}{(2k)!}x^k + o(x^{2n+1})$ olur.

(j) $f(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{3(-1)^k}{4(2k+1)!}(1-3^{2k}x^{2k+1} + o(x^{2n})$ olur. (k)ve(l) de verilen fonksiyonların Maclaurin formüllerini aşağıdaki önermeden faydalanarak bulacağız.

Önerme 4.5.6 :: *$f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f'(x)$ tüevi için $b_k = \frac{f^{k+1}(x_0)}{k!}$ olmak üzere $x \to x_0$ iken*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

olsun. Bu durumda, $f^{(n+1)}(x_0)$ türevi vardır ve $x \to x_0$ iken

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1})$$

dir.

(k) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$ olduğuna göre, Önerme 4.5.6 dan dolayı

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2^{k+1}} + o(x^{2n+2})$$

olur.
(l) $\forall x \in (-1, 1)$ için

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1.3...(2k-1)}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

olduğuna göre, Önerme 4.5.6 dan dolayı

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1.3...(2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

olur. $\diamond$

(4) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktanın komşuluğunda Peano kalan terimli Taylor formüllerini yazınız.

(a) $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}, x_0 = 1;$
(b) $f(x) = \ln(3 + 2x - x^2), x_0 = 2;$
(c) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, x_0 = 2;$

Çözüm: (a) $x + 1 = t$ olsun. O halde,

$$f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{3t}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3}{2}t(1 - \frac{t^2}{4})^{-\frac{1}{2}} = g(t)$$

olur.$g(t)$ fonksiyonunun Peano kalan terimli Maclaurin formülü

$$g(t) = \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}t \sum_{k=1}^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{t^{2k}}{4^k} + o(t^{2n})$$

$$= \frac{3}{2}t + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(1.3...(2k-1))}{2^{3k+1}k!} t^{2k+1} + o(t^{2n})$$

olduğuna göre, $t = x + 1$ değişken değişimi yaparsak,

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(1.3...(2k-1))}{2^{3k+1}k!} (x+1)^{2k+1} + o((x+1)^{2n})$$

olur.

(b) $3+2x-x^2=(3-x)(x+1)$ olduğuna göre, $t=x-2$ dersek

$$3+2x-x^2=(1-t)(3+t)=3(1-t)(1+\frac{t}{3})$$

olur.Buna göre,

$$f(x)=\ln 3+\ln(1-t)+\ln(1+\frac{t}{3})=g(t)$$

olur.$g(t)$ fonksiyonunun Maclaurin formülü

$$g(t)=\ln 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k.3^k}+o(t^n)$$

olduğuna göre, ($t=x-2$ olmak üzere)

$$f(x)=\ln 3+\sum_{k=1}^{n}(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}-1)\frac{(x-2)^k}{k}+o((x-2)^n)$$

olduğu bulunur.

(c) $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x=\cos\frac{\pi}{4}(x-2)[\frac{\pi}{4}(x-2)=t \text{ dersek}]=\cos \mathrm{t}=\mathrm{g(t)}$ olur.

$$g(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}+o(t^{2n+1})$$

olduğuna göre,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!}+o((x-2)^{2n+1})$$

olur. $\diamond$

(5) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $f,[0,1]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilirdir,

(b) $f(0)=f(1)=0$,

(c) $\forall x \in (0,1)$ için $\mid f''(x) \mid\leq A$ olacak şekilde bir $A > 0$ sayısı vardır koşulları sağlanıyorsa $\forall x \in [0,1]$ için $\mid f'(x) \mid\leq \frac{A}{2}$ olur. Gösteriniz.

Çözüm: Lagrange kalan terimli Taylor formülüne göre

$$f(0) = f(x) - xf'(x) + f''(c_1)\frac{x^2}{2}, 0 < c_1 < x \leq 1,$$

$$f(1) = f(x) + (1-x)f'(x) + f''(c_2)\frac{(1-x)^2}{2}, 0 \leq x < c_2 < 1$$

yazabiliriz. Buradan,

$f'(x) = \frac{1}{2}(f''(c_1)x^2 - f''(c_2)\frac{(1-x)^2}{2}), 0 < x < 1 \Rightarrow\mid f'(x) \mid\leq \frac{a}{2}(1-2x+2x^2), 0 \leq x \leq 1$ bulunur. $\forall x \in [0,1]$ için $0 \leq 1-2x+2x^2 \leq 1$ olduğuna göre, son eşitlikten $\forall x \in [0,1]$ için $\mid f'(x) \mid\leq \frac{A}{2}$ olduğu anlaşılır. $\diamond$

(6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $f, \mathbb{R}$ üzerinde 2. mertebeden türevlenebilirdir,

(b) $M_k = sup\{\mid f^k(x) \mid: x \in \mathbb{R}\} < +\infty, k = 0,1,2$ koşulları sağlanıyorsa

$$M_2^2 \leq 2M_0M_2$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm: Lagrange kalan terimli Taylor formülüne göre $x, x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + f''(c)\frac{(x_0-x)^2}{2}$$

olacak şekilde x ile x_0 arasında bir c noktası vardır. Buna göre,

$$\begin{aligned}\mid f(x_0) \mid &\leq \mid f(x) \mid + \mid f'(x) \mid\mid x_0 - x \mid + \mid f''(c) \mid \frac{\mid x_0 - x^2 \mid}{2} \\ &\leq M_0 + M_1 \mid x_0 - x \mid + M_2\frac{\mid x_0 - x \mid^2}{2}\end{aligned}$$

olur. $\forall y \in [0,+\infty)$ için $M_0 + M_1 y + M_2 \frac{y^2}{2} \geq 0$ olduğuna göre, $M_1^2 - 4\frac{M_2}{2}M_0 = M_1^2 - 2M_0M_2 \leq 0$ dır. Bu ise, istenen eşitsizliğin doğru olması demektir. $\diamond$

Şimdi limit hesabında Taylor formüllerinin bazı uygulamalarını görelim.

(7) Taylor formüllerinden yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x + 2\sin x - 3x}{x^4}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arctan x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x + \frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x(\sin x - 1)}}$.

Çözüm: (a) $x \to 0$ iken $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3}) = -\frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

olur.

(b) $x \to 0$ iken $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + 2sinx - 3x}{x^4} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) + 2(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)) - 3x}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4) + 2o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0
\end{aligned}$$

olur.

(c) $x \to 0$ iken $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\sqrt{1+2x} = 1 + x - x^3 + o(x^3)$ ve $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) - (1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + xo(x^3) + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -1
\end{aligned}
$$

olur.

(d) $x \to 0$ iken $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^5)$ $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^5)$ olduğuna göre,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^5))}{(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^5)) - (x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^5))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^5)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^5)} = -1
\end{aligned}
$$

olur.

(e) $t \to 0$ iken $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ olduğuna göre, $x \to 0$ iken $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ olur. O halde,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))}{x^3(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

olur.

(f) $t \to 0$ iken $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$ olduğuna göre, $x \to 0$ iken

$$
\begin{aligned}
\sin(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{120}(\sin x)^5 + o(\sin x)^6 \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6))^3 \\
&+ \frac{1}{120}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6))^6 \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}
$$

ve $x \to 0$ iken

$$\begin{aligned} x\sqrt[3]{1-x^2} &= x(1-x^2)^{\frac{1}{3}} = x(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)) \\ &= x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^5)) \end{aligned}$$

oldğuna göre

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)-(x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5)+o(x^5)}{x^5} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{19}{90}x^5+o(x^5)}{x^5} = \frac{19}{90} \end{aligned}$$

olur.

(g) $u>0$ ıçın $u^v = e^{v\ln n}$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin x\ln\cos x}}{x^3}$$

[$t \to 0$ iken $e^t = 1+t+o(t^2) \Rightarrow x \to 0$ iken $e^{\sin x\ln\cos x} = 1 + \sin x\ln\cos x + o(\sin x\ln\cos x)$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln\cos x+o(\sin x\ln\cos x)}{x^3}$$

[$x \to 0$ iken

$$\begin{aligned} \sin x\ln\cos x &= \sin x\ln\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\sin x\ln(1-\sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2}\sin x(-\frac{\sin^2 x}{2}+o(x^4)) = -\frac{1}{4}\sin^3 x+o(x^4) \\ &= -\frac{1}{4}x^3+o(x^4) \end{aligned}$$

$\Rightarrow x \to 0$ iken $o(\sin x\ln\cos x) = o(x^3)$ olduğundan]

$$\begin{aligned} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln\cos x+o(x^3)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur.

(h) $y = (cosx + \frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x(\sin x - x)}}$ olsun. O halde,

$$\ln y = \frac{1}{x(\sin x - x)} \ln(\cos x + \frac{x^2}{2})$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \ln y &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x + \frac{x^2}{2})}{x(\sin x - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5))}{x(-\frac{x^3}{6} + o(x^4))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5))}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^5)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)} \\
&= -\frac{1}{4} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

olur. $\diamond$

4.5.2 Ek Problemler

(8) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktadaki verilen dereceden Taylor formüllerini yazınız.

(a) $f(x) = (1 - 2x + 3x^2 + 4x^3)^3,\ x_0 = 0, n = 5;$

(b) $f(x) = \frac{1}{3x+4},\ x_0 = 0, n = 4;$

(c) $f(x) = e^{\tan x},\ x_0 = 0, n = 2;$

(d) $f(x) = \ln\cos x,\ x_0 = 0, n = 2;$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{1 - 3x\cos 2x}\ x_0 = 0, n = 3;$

(f) $f(x) = \ln^3(1 - \frac{x}{2}),\ x_0 = 0, n = 3;$

(g) $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}},\ x_0 = 0, n = 4;$

(h) $f(x) = \sin(\arctan x),\ x_0 = 0, n = 4;$

(i) $f(x) = \sqrt{\cos x},\ x_0 = 0, n = 4;$

(j) $f(x) = \frac{1}{\cos x},\ x_0 = 0, n = 5;$

(k) $f(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$, $x_0 = 0, n = 5$;

(l) $f(x) = \tanh x$, $x_0 = 0, n = 6$.

Cevap:

(a) $1 - 6x + 21x^2 - 32x^3 + 15x^4 + 66x^5 + r_5(o;x), r_5(o;x) = o(x^5)$;

(b) $\frac{1}{4} - \frac{3}{4^2}x + \frac{3^2}{4^3}x^2 - \frac{3^3}{4^4}x^3 + \frac{3^4}{4^5}x^4 + r_4(o;x), r_4(o;x) = o(x^4)$;

(c) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + r_2(o;x), r_2(o;x) = o(x^2)$;

(d) $-\frac{x^2}{2} + r_2(o;x), r_2(o;x) = o(x^2)$;

(e) $1 - x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + r_3(o;x), r_3(o;x) = o(x^3)$;

(f) $-\frac{x^3}{8} + r_3(o;x), r_3(o;x) = o(x^3)$;

(g) $e + \frac{e}{6}x^2 + \frac{e}{30}x^4 + r_4(o;x), r_4(o;x) = o(x^4)$;

(h) $x - \frac{x^3}{2} + r_3(o;x), r_3(o;x) = o(x^4)$;

(i) $1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + r_4(o;x), r_4(o;x) = o(x^4)$;

(j) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + r_4(o;x), r_4(o;x) = o(x^5)$;

(k) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + r_5(o;x), r_5(o;x) = o(x^5)$;

(l) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + r_5(o;x), r_5(o;x) = o(x^6)$.

(9) Aşağıdaki fonksiyonların Peano kalan terimli Maclaurin formüllerini yazınız.

(a) $f(x) = 3^{(2-x)}$;

(b) $f(x) = (x^2 - x)e^x$;

(c) $f(x) = \ln \frac{2-3x}{3+2x}$;

(d) $f(x) = (1 + x^2) \ln \sqrt{1+x}$;

(e) $f(x) = \ln \frac{x+4}{x^2-5x+6}$;

(f) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$;

(g) $f(x) = \frac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$;

(h) $f(x) = x \cosh 3x$;

(i) $f(x) = \sin^3 x \cos x$;

(j) $f(x) = \frac{x}{3} \ln \frac{x^2-1}{x^2-e}$;

(k) $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$;

(l) $f(x) = \cosh x \cosh 3x$;

(m) $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

Cevap: (a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{9(\ln 3)^k}{k!}x^k+o(x^n)$;

(b) $-x+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k k}{(k-1)!}x^k+o(x^n)$;

(c) $\ln\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k-9^k}{k6^k}x^k+o(x^n)$;

(d) $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)}{k(k-2)}x^k+o(x^n)$;

(e) $\ln\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{(k-1)}4^{(}-k)+2^{(-k)}+3^{(-k)}}{k}x^k+o(x^n)$;

(f) $\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n}((-1)^k3^{-(k+1)}-1)x^k+o(x^n)$;

(g) $\frac{5}{2}+\sum_{k=1}^{n}((-1)^k2^{-(k+1)}-1)x^k+o(x^n)$;

(h) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3^{2k}}{(2k)!}x^{2k+1}+o(x^n)$;

(i) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}2^{2k-1}(1-2^{2k})x^{2k+1}+o(x^{2n})$;

(j) $-\frac{x}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-k}-1}{3k}x^{2k+1}+o(x^{2n})$;

(k) $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{3(-1)^k4^{2k-1}}{2(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

(l) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}(2^{2k}+1)x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

(m) $\sum_{k=1}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

(10) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktanın komşuluğunda Peano kalan terimli Taylor formüllerini yazınız.

(a) $f(x)=\sin(2x-3), x_o=1$;

(b) $f(x)=x^2e^{-2x}, x_o=1$;

(c) $f(x)=\ln(2+x-x^2), x_o=1$;

(d) $f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1}, x_o=1$;

(e) $f(x)=e^{2x^2+8x+3}, x_o=-2$;

(f) $f(x)=\sin^2(x-1)\cos(x-1), x_o=1$;

(g) $f(x) = \log_5 \sqrt[3]{\frac{2x-1}{3-2x}}, x_o = 1.$

Cevap: (a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k \sin(\frac{k\pi}{2}-1)}{k!}(x-1)^k + o((x-1)^n);$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k e^2 2^{k-2}}{k!}(k^2+3k+4)(x+1)^k + o((x+1)^n);$

(c) $\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} 2^{-k}-1}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n);$

(d) $2 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{2^k} + o((x-1)^n);$

(e) $\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-5} 2^k}{k!}(x+2)^{2k} + o((x+2)^{2n+1});$

(f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (1-3^{2k})}{4(2k)!}(x-1)^{2k} + o((x-1)^{2n+1});$

(g) $\frac{2}{3\ln 5} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{2k-1}}{2k-1}(x-1)^{2k-1} + o((x-1)^{2n+1}).$

(11) Taylor formüllerinden yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2};$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3};$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4};$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh 2x-2\sinh x}{x^2};$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x};$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\arcsin x-\arcsin 2x}{x^3};$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x};$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+\ln(1-\sin x)-1}{\sqrt[3]{8-x^4}-2};$ (j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+\frac{1}{3}x^3}{x-\tanh x};$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x}{x^4};$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4};$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)-\tanh x}{x^5};$ (n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{3}}-\sqrt{\frac{x+3}{3-x}}}{x^3};$

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x-x\sqrt[3]{1+x^2}}{x^4};$ (p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4};$

(q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)-x+\frac{x^3}{3}}{\sinh(sinhx)-\tan x};$ (r) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^3}-\cos x^4}{\tan x-x};$

(s) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}};$ (t) $\lim\limits_{x\to 0}(\cosh x)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$

(u) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{\arcsin x})^{\frac{1}{x^2}};$ (v) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x};$

(w) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2\tan x}{x+\sin x})^{\frac{1}{1-\cos x}};$ (x) $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{3-x}+\ln\frac{x}{2})^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}};$

(y) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{((1+x)^{\frac{1}{x}}-e)^2}{\ln(x+\cos x)-x}$; (z) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{2(\sqrt{1+x}-x)})^{\cot x}$;

(xx) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x^2-1})^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$; (yy) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$.

Cevap:

(a)	$-\frac{1}{2}$;	(b)	$\frac{1}{2}$;	(c)	$\frac{1}{6}$;	(d)	$\frac{1}{24}$;	(e)	1;	(f)	-2;
(g)	-1;	(h)	-1;	(i)	$-\frac{7}{4}$;	(j)	$\frac{1}{2}$;	(k)	0;	(l)	$-\frac{1}{45}$;
(m)	$-\frac{1}{24}$;	(n)	$-\frac{1}{30}$;	(o)	$-\frac{1}{81}$;	(p)	$\frac{11}{45}$;	(q)	$-\frac{1}{6}$;	(r)	-3;
(s)	3;	(t)	$e^{-\frac{1}{2}}$;	(u)	$e^{\frac{1}{2}}$;	(v)	$e^{-\frac{1}{3}}$;	(w)	$\frac{1}{\sqrt{e}}$;	(x)	$e^{\frac{5}{6}}$;
(y)	$e^{-\frac{1}{4}}$;	(z)	$-\frac{e^2}{4}$;	(xx)	$e^{-\frac{1}{3}}$;	(yy)	$\frac{2}{5}$.				

4.6 L'Hospital Kuralı

Bölüm 2'de $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0$ ve 1^∞ şeklinde belirsizlik oluşturan birçok dizilerin ve fonksiyonların limitlerinin, özel olarak, suni usullerle bulunabileceğini gördük. (4.5) ten de görüldüğü gibi böyle belirsizlikler diferansiyel hesap yöntemlerine(yani orta değer teoremleri ve Taylor formülüne) dayanık daha güçlü metodlarla incelenebilir. Bu kısımda sözkonusu metodlardan biri olan L'Hospital kuralı incelenecektir.

4.6.1 $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali

Teorem 4.6.1 (1. L'Hospital Kuralı) *:*

$\delta \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}$ ve $f, g : \overset{\circ}{U}_\delta(a) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ komşuluğu üzerinde türevlenebilen $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ için $g'(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ olsun. Eğer,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{4.60}$$

limiti varsa, ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limiti de vardır ve

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.61}$$